

# ارتعاشات غیرخطی ورقه‌ی نانوکامپوزیت ویسکوالاستیک حاوی نانولوله کربنی

سید عیسی کرانیان<sup>۱</sup> | سیامک اسماعیل‌زاده خادم<sup>۲\*</sup> | مهرداد کوکی<sup>۳</sup>

۱. دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.  
۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.  
۳. دانشکده مهندسی شیمی و پلیمر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

## چکیده

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی ورقه‌ی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حرکت ارتعاشی را به روش مقیاس‌های چندگانه حل می‌کنیم. برای ارتعاشات آزاد ورقه، فرکانس طبیعی غیرخطی بدست آمد. ضمناً اثرات ضریب میرایی یا ویسکوزیته ماده، کسر حجمی نانولوله کربنی و هم‌چنین نسبت ضخامت به بعد صفحه در فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که افزایش نسبت ضخامت صفحه به طول آن، باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی صفحه می‌گردد و هم‌چنین کاهش نسبت ضخامت به طول صفحه باعث کاهش در نرخ کاهش دامنه می‌گردد.

**واژگان کلیدی:** ارتعاشات غیرخطی، روش مقیاس‌های چندگانه، مواد ویسکوالاستیک، نانوکامپوزیت.

## ۱ مقدمه

لازمه شناخت یک سامانه دینامیکی، بدست آوردن خواص دینامیکی و ارتعاشاتی آن شامل فرکانس طبیعی و شکل مود آن است. با توجه به رشد روز افزون فناوری، دستیابی به مواد جدید فراهم گردیده است. از جمله‌ی این مواد، نانوکامپوزیت‌های پلیمری هستند. با توجه به اینکه این مواد، دست ساز بوده، خواص آن‌ها به نحو قابل توجهی توسط سازنده تعیین می‌شود. از خواص متمایز این مواد، سبکی، مقاومت مکانیکی، خاصیت میراکنندگی و غیره است. با مطالعه دقیق‌تر این گونه مواد، کاربرد بهتر آن‌ها میسر می‌گردد. از جمله کاربردهای این مواد، ساخت ورقه‌های کم حجم و نازک نانوکامپوزیت پلیمری جهت استفاده در لابه‌لای قطعات سقف و بدنه و کف خودروهای نظامی و غیرنظامی به منظور کاهش صدا و میرا کردن ارتعاشات است. با توجه به

خصوصیات ذاتی این‌گونه مواد و نحوه ساخت آن‌ها، این مواد اغلب دارای خواص غیرخطی در سختی و اینرسی هستند. بنابراین لزوم مطالعه دقیق نحوه ارتعاشات غیرخطی برای بدست آوردن خصوصیات مودال این سامانه‌ها بحث تازه‌ای نیست. معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات صفحه در اوایل قرن نوزدهم توسط ریلی (Rayleigh) بیان گردید [۱]. در سال ۱۹۷۵، Duran و Lanra روش گلرکین را برای بدست آوردن پاسخ یک صفحه گیردار نسبت به تحریکی هارمونیک به کار بردند [۲]. Shaw و Pierre برای تعیین معادلات حاکم بر سیستم‌های غیرخطی و بررسی انواع ترم‌های غیرخطی، از روش منیقولدهای نامتغیر استفاده نمودند [۳]. برای صفحات مورق کامپوزیتی Tae-woo و Kim، با استفاده از تئوری تغییر شکل غیرخطی Von Karman و قانون برهم نهش بولتزمن، با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت غیرخطی حاکم بر صفحات ویسکوالاستیک را استخراج نمودند [۴]. Karnaukhov و همکارانش، معادلات میرایی ارتعاشات صفحه ویسکوالاستیک مستطیلی با محرک‌های پیزوالکتریک را بدست آوردند [۵]. Sharyat و همکارانش معادلات ارتعاشات آزاد صفحه ویسکوالاستیک دایروی با ضخامت متغیر را استخراج کردند [۶]. Breslavsky توزیع تنش بر روی صفحات مرتعش با دامنه بزرگ را با در نظر گرفتن پارامترهای غیرخطی فیزیکی و هندسی در معادلات بدست آورد [۷]. Moita با استفاده از روش اجزا محدود، بهینه‌سازی میرایی ساختارهای ساندویچی صفحات ویسکوالاستیک را انجام داد [۸].

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی یک ورقه‌ی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداخته می‌شود. برای این منظور برای حل معادلات استخراج شده، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده خواهد شد.

## ۲ بخش تئوری

### مدلسازی

یک صفحه ویسکوالاستیک مستطیل شکل را که دارای ابعاد  $a$  و  $b$  و ضخامت  $h$  می باشد را در نظر می گیریم که تحت تغییر شکل بزرگ قرار گرفته است و میزان تغییر مکان در جهت های  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب  $u$ ،  $v$  و  $w$  باشد. در این جا برای بدست آوردن معادلات حرکت از اصل هامیلتون استفاده می شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \quad (1)$$

با محاسبه ی تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل در اصل هامیلتون، معادلات حرکت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} N_{1,x} + N_{6,y} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{u}_{,x} + \mu_1 \dot{u} \\ N_{6,x} + N_{2,y} &= I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{v}_{,y} + \mu_2 \dot{v} \\ M_{1,xx} + 2M_{6,xy} + M_{2,yy} &= I_0 \ddot{w} \\ &\quad - (I_2 \ddot{w}_{,x} - I_1 \dot{w}_{,x}) \\ &\quad - (I_2 \ddot{w}_{,y} - I_1 \dot{w}_{,y}) + \mu_3 \dot{w} \end{aligned} \quad (2)$$

در اینجا از مدل کلونین-ویت جهت مدل سازی ماده ویسکوالاستیک استفاده می گردد. زیرا مدل مذکور به خوبی می تواند پدیده های خزش و رهایی از تنش را در جامدات مدل سازی نماید و از طرف دیگر استفاده از این مدل امکان مقایسه حالت ویسکوالاستیک و الاستیک را بسیار خوب نمایان می سازد. این امر سبب می شود اثرات میرایی که یکی از مهم ترین خواص مواد ویسکوالاستیک هستند به راحتی مورد بررسی قرار گیرد. از سوی دیگر بر اساس قانون مخلوط، خواص فیزیکی برای یک نانوکامپوزیت را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E_1 &= \eta_1 V_{CNT} E_1^{CNT} + V_m E_m \\ \frac{\eta_2}{E_2} &= \frac{V_{CNT}}{E_2^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \\ \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \\ \nu_{12} &= \bar{V}_{CNT} \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu_m \\ \rho &= V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m \\ V_{CNT} + V_m &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

که در این رابطه  $E_1^{CNT}$ ،  $E_2^{CNT}$ ،  $G_{12}^{CNT}$ ،  $\nu_{12}^{CNT}$  و  $\rho_{CNT}$  مدول الاستیسیته، مدول برشی، ضریب پواسون و چگالی نانولوله کربنی هستند.  $E_m$  مدول الاستیسیته،  $G_m$  مدول برشی،  $\nu_m$  ضریب پواسون و  $\rho_m$  چگالی ماده ی زمینه

می باشند. هم چنین  $\eta_1$ ،  $\eta_2$  و  $\eta_3$  پارامترهای بهره وری نانولوله کربنی هستند که در جدول ۱ ذکر شده اند.

**جدول ۱** پارامترهای بهره وری بر حسب تابعی از کسر حجمی میانگین نانولوله کربنی.

$\bar{V}_{CNT}$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
۰,۱۱	۰,۱۴۹	۰,۹۳۴	۰,۹۳۴
۰,۱۴	۰,۱۵۰	۰,۹۴۱	۰,۹۴۱
۰,۱۷	۰,۱۴۹	۱,۳۸۱	۱,۳۸۱

$V_m$  و  $V_{CNT}$  کسرهای حجمی نانولوله کربنی و ماده زمینه هستند که به تابع توزیع نانولوله های کربنی در ماده ی زمینه بستگی دارند.

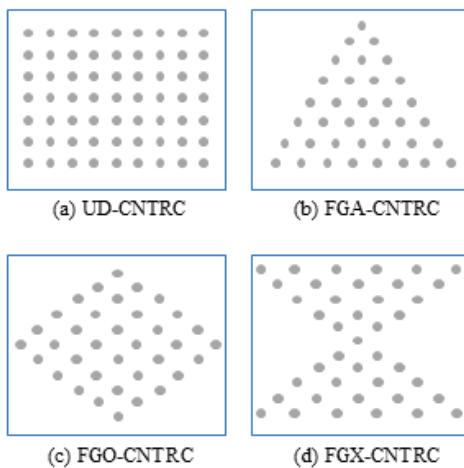
$$V_{CNT} = \bar{V}_{CNT} f(z), \quad V_m = \bar{V}_m f(z) \quad (4)$$

$$\bar{V}_{CNT} = \frac{\bar{m}_{CNT}}{\bar{m}_{CNT}(1 - \rho_{CNT}/\rho_m) + (\rho_{CNT}/\rho_m)} \quad (5)$$

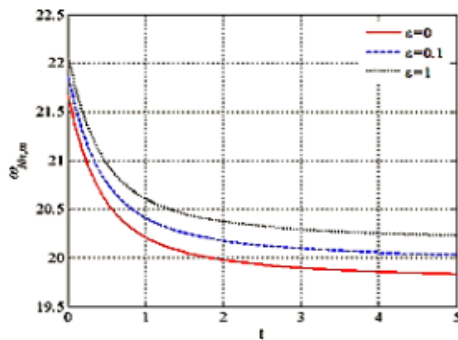
$$V_m(z) + V_c(z) = 1 \quad (6)$$

که در این رابطه  $\bar{m}_{CNT}$  میانگین کسر جرمی نانولوله کربنی در صفحه می باشد. همچنین  $\bar{V}_m$  و  $\bar{V}_{CNT}$  میانگین کسرهای حجمی نانولوله کربنی و ماده زمینه هستند.  $f(z)$  تابع توزیع نانولوله کربنی می باشد که برای چهار حالت که در شکل ۲ رسم شده است.

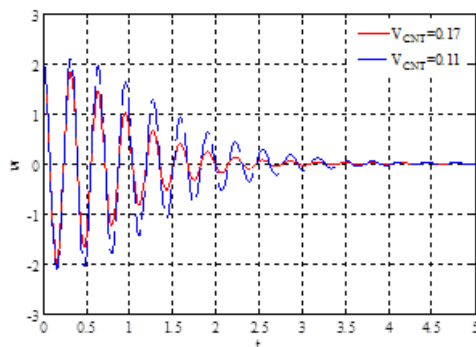
$$\begin{aligned} f(z) &= 1 && \text{for UD} \\ f(z) &= 1 - \frac{2z}{h} && \text{for FG-A} \\ f(z) &= 4 \frac{|z|}{h} && \text{for FG-X} \\ f(z) &= 2(1 - 2 \frac{|z|}{h}) && \text{for FG-O} \end{aligned} \quad (7)$$



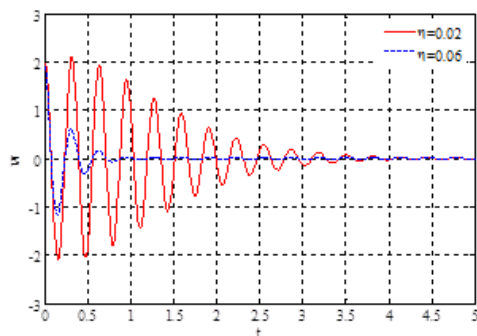
**شکل ۱** چهار توزیع مختلف نانولوله کربنی در نانو ورقه.



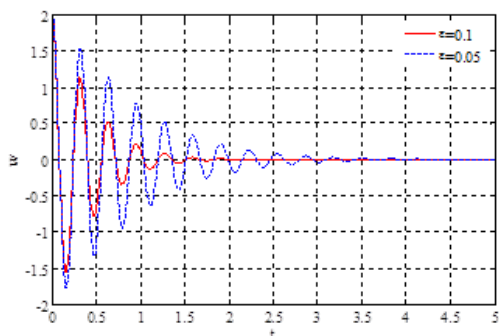
**شکل ۴** تاثیر  $\varepsilon$  بر نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب زمان برای کسر حجمی ۰/۱۱ نانولوله کربنی



**شکل ۵** تاریخچه زمانی برای کسر حجمی های متفاوت نانولوله کربنی



**شکل ۶** تاثیر ضریب میرایی بر روی تاریخچه زمانی در کسر حجمی ۰/۱۷ نانولوله کربنی

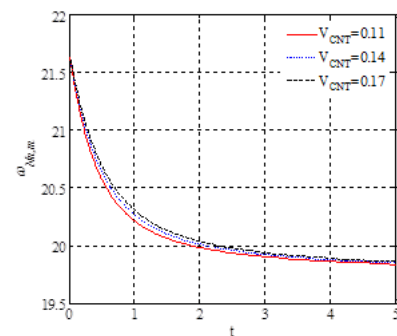


**شکل ۷** تاثیر  $\varepsilon$  بر روی تاریخچه زمانی پاسخ در کسر حجمی ۰/۱۷ نانولوله کربنی

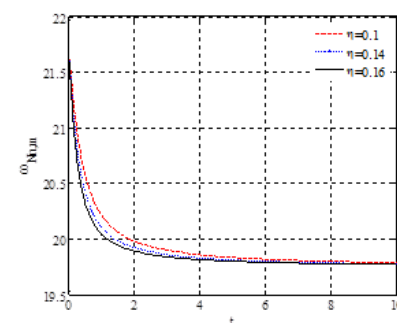
در این مقاله معادلات حرکت ارتعاشی ورقه‌ی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی را به روش مقیاس‌های چندگانه حل می‌کنیم. معادلات بدون استفاده از روش گلرکین و بدون استفاده از یک تابع تنش، مستقیماً حل می‌شوند. مزیت این روش آن است که از عدم دقتی که ناشی از جداسازی تابع پاسخ بوجود می‌آید جلوگیری می‌کند و پاسخ با دقت بیش‌تری به دست می‌آید.

### ۳ نتایج و بحث

شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات ورقه نسبت به زمان را برای مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله کربنی نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش کسر حجمی نانولوله کربنی فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش می‌یابد. شکل ۳ نشان‌دهنده‌ی اثرات ضریب میرایی در مقدار فرکانس طبیعی غیرخطی است. در این شکل نشان داده شده‌است که کاهش مقدار ضریب میرایی باعث می‌شود نرخ کاهش فرکانس طبیعی غیرخطی در حوزه زمان کم شود.



**شکل ۲** نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب زمان برای توزیع یکنواخت و کسر حجمی‌های متفاوت نانولوله کربنی



**شکل ۳** تاثیر ضریب میرایی بر روی فرکانس غیرخطی در کسر حجمی ۰/۱۱ نانولوله کربنی

هم‌چنین اثرنسبت ضخامت به بعد صفحه (که با پارامتر بدون بعد  $\varepsilon = (h/a)^2$  مشخص شده است) بر روی فرکانس اول غیرخطی در شکل ۴ نشان داده شده‌است

## مراجع

- [1] L. Rayleigh, Theory of sound, 2nd ed., London: Macmillan Press, 1945.
- [2] P. A. A. Lanra and R. Duran, "A note on forced vibrations of a clamped rectangular plate," Journal of Sound and Vibration, vol. 42, pp. 129-135, 1975.
- [3] S. W. Shaw and C. Pierre, "Non-linear normal modes and invariant manifolds," Journal of Sound and Vibration, vol. 150, pp. 170-173, 1991.
- [4] T. W. Kim and J. H. Kim, "Nonlinear vibration of viscoelastic laminated composite plates," International Journal of Solids and Structures, vol. 39, pp. 2857-2870, 2002.
- [5] V. G. Karnaukhov and Ya. V. Tkachenko, "Studying the harmonic vibrations of a cylindrical shell made of a nonlinear elastic piezoelectric material," International Applied Mechanics, vol. 44, pp. 442-447, 2008.
- [6] M. Shariyat, A. A. Jafari and M. M. Alipour, "Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates," Acta Mechanica Solida Sinica, vol. 26, pp. 83-98, 2013.
- [7] I. D. Breslavsky, "Stress distribution over plates vibrating at large amplitudes," Journal of Sound and Vibration, vol. 331, pp. 2901-2910, 2012.
- [8] J. S. Moita, A. L. Araújo, C. M. Mota Soares and C. A. Mota Soares, "Finite element model for damping optimization of viscoelastic sandwich structures," Advances in Engineering Software, vol. 66, pp. 34-39, 2013.

در شکل ۵ تغییر مکان جانبی صفحه در نقطه وسط برای کسر حجمی‌های مختلف مشخص گردیده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد چون ماده مورد نظر ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده‌است بنابراین خاصیت میرایی باعث کاهش دامنه می‌گردد. هم‌چنین با افزایش کسر حجمی نانولوله کربنی دامنه کاهش یافته‌است.

شکل ۶ بیان‌گر اثرات ضریب میرایی بر پاسخ سیستم در وسط صفحه است. با توجه به شکل مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار ضریب میرایی در مدل کلونین-ویت، نرخ کاهش دامنه افزایش می‌یابد. یکی از مزایایی که در روش مقیاس‌های چندگانه نسبت به روش‌های دیگر وجود دارد آن‌است که با استفاده از آن نسبت حساسیت پاسخ به پارامترهای سیستم را می‌توان سنجید. پارامتری که در اینجا به عنوان پارامتر کوچک معرفی گردیده‌است مربع نسبت ضخامت ورق به طول ورق می‌باشد.

شکل ۷ اثرات تغییرات این پارامتر را بر روی پاسخ سیستم بیان می‌کند. این شکل نشان می‌دهد که کاهش نسبت ضخامت به طول صفحه باعث کاهش در نرخ کاهش دامنه می‌گردد.

## ۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا معادلات ارتعاشات غیرخطی صفحه مستطیل شکل ویسکوالاستیک با استفاده از مدل کلونین-ویت همگن استخراج گردید. سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، بدون استفاده از تابع تنش و یا جدا سازی به روش گلرکین که سبب ایجاد خطا در پاسخ می‌گردد، تحلیل این معادلات انجام شد. هم‌چنین، ارتعاشات آزاد صفحه مورد بررسی قرار گرفته و فرکانس طبیعی غیرخطی و شکل مودهای غیرخطی صفحه فوق بدست آمد. ضمناً اثرات ضریب میرایی یا ویسکوزیته ماده، کسر حجمی نانولوله کربنی و هم‌چنین نسبت ضخامت به بعد صفحه در فرکانس طبیعی و شکل مود غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که افزایش کسر حجمی نانولوله کربنی باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی و کاهش زمان گذرای سیستم می‌شود. از طرفی کاهش مقدار ضریب میرایی باعث می‌شود نرخ کاهش فرکانس طبیعی غیرخطی در حوزه زمان کم شود. علاوه بر این افزایش نسبت ضخامت صفحه به طول آن باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی صفحه می‌گردد.

# Nonlinear Vibrations of Nanocomposite Viscoelastic Plates Containing Carbon Nanotube

S.E.Korania<sup>1</sup> | S.Esmaeelzadeh Khadem<sup>2\*</sup> | M.Kokabi<sup>3</sup>

1.Department of Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

2.Department of Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

3.Department of Polymer, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

## Abstract

In this paper, the nonlinear vibrations of composite plate forced by carbon nanotube have been investigated. The equations of vibrational motion have been solved by multiple scales method. For free vibrations of nanocomposite plates, natural nonlinear frequencies have been calculated. Furthermore, the effects of damping factor, volume fraction of carbon nanotube, and the ratio of thickness to dimension of plates in natural frequency has been investigated. Our results highlight that nonlinear natural frequency of plate increases by increasing the ratio of thickness to the dimensions of plates. Moreover, a decrease in the proportion of thickness to the length of the plate resulted in a downfall in the falling trend of the domain.

## Keywords

Multiple Scales Method, Nanocomposite, Nonlinear Vibrations, Viscoelastic Materials.